

Аппроксимация гладких функций на отрезке на базе дискретных
всплеск-преобразований.

Выступающий: Д.А.Ямковой

Руководитель: доцент, к.т.н. В.Л.Авербух

Соруководитель: профессор, д.ф.-м.н. Н.И.Черных

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина,
Институт математики и компьютерных наук,
Кафедра математической экономики

Цели и задачи

- Предмет исследования: функции из $C^k[a, b]$ и возможность их аппроксимации с помощью всплесков.

Цели и задачи

- **Предмет исследования:** функции из $C^k[a, b]$ и возможность их аппроксимации с помощью всплесков.
- **Исследуемые характеристики:** погрешность аппроксимации и время выполнения быстрого всплеск-преобразования.

Цели и задачи

- **Предмет исследования:** функции из $C^k[a, b]$ и возможность их аппроксимации с помощью всплесков.
- **Исследуемые характеристики:** погрешность аппроксимации и время выполнения быстрого всплеск-преобразования.
- **Цель исследования:** разработать более оптимальные методы аппроксимации.

- Аппарат теории всплесков, используемый для аппроксимации, плохо приспособлен для приближения функций, определенных на отрезке.

Аппроксимация с помощью всплесков

$$f \approx P_j(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \varphi_{j,k}) \varphi_{j,k}(x),$$

где $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ есть ортонормированный базис пространства $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$.

- Аппарат теории всплесков, используемый для аппроксимации, плохо приспособлен для приближения функций, определенных на отрезке.
- Существуют различные способы адаптации базиса $L^2(\mathbb{R})$ к случаю $L^2[a, b]$, которые, однако, имеют свои недостатки.

Способы адаптации базиса $L^2(\mathbb{R})$ к случаю $L^2[a, b]$:

Способы адаптации базиса $L^2(\mathbb{R})$ к случаю $L^2[a, b]$:

- 1 Продолжение исходной функцию на всю вещественную ось и использование стандартного аппарат КМА для $L^2(\mathbb{R})$.

Способы адаптации базиса $L^2(\mathbb{R})$ к случаю $L^2[a, b]$:

- 1 Продолжение исходной функцию на всю вещественную ось и использование стандартного аппарат КМА для $L^2(\mathbb{R})$.
- 2 Периодизированные вейвлеты.

Способы адаптации базиса $L^2(\mathbb{R})$ к случаю $L^2[a, b]$:

- 1 Продолжение исходной функцию на всю вещественную ось и использование стандартного аппарат КМА для $L^2(\mathbb{R})$.
- 2 Периодизированные вейвлеты.
- 3 "folding" вейвлеты.

Способы адаптации базиса $L^2(\mathbb{R})$ к случаю $L^2[a, b]$:

- 1 Продолжение исходной функцию на всю вещественную ось и использование стандартного аппарат КМА для $L^2(\mathbb{R})$.
- 2 Периодизированные вейвлеты.
- 3 "folding" вейвлеты.
- 4 "left edge" , "right edge" , "interior" вейвлеты.

План работ

- 1** Исследовать различные варианты экстраполяции исходной функции с сохранением гладкости.

План работ

- 1** Исследовать различные варианты экстраполяции исходной функции с сохранением гладкости.
 - Рассмотреть различные варианты продолжений.

- 1** Исследовать различные варианты экстраполяции исходной функции с сохранением гладкости.
 - Рассмотреть различные варианты продолжений.
 - Провести сравнительный анализ полученных способов.

- 1** Исследовать различные варианты экстраполяции исходной функции с сохранением гладкости.
 - Рассмотреть различные варианты продолжений.
 - Провести сравнительный анализ полученных способов.
 - Программно разработать данные методы.

План работ

- 1** Исследовать различные варианты экстраполяции исходной функции с сохранением гладкости.
 - Рассмотреть различные варианты продолжений.
 - Провести сравнительный анализ полученных способов.
 - Программно разработать данные методы.
- 2** Оптимально выбрать границы экстраполяции.

- 1 Исследовать различные варианты экстраполяции исходной функции с сохранением гладкости.**
 - Рассмотреть различные варианты продолжений.
 - Провести сравнительный анализ полученных способов.
 - Программно разработать данные методы.
- 2 Оптимально выбрать границы экстраполяции.**
 - Получить точные формулы для частных случаев $k = 1$, $k = 2$ (Эрмитово продолжение).

- 1 Исследовать различные варианты экстраполяции исходной функции с сохранением гладкости.**
 - Рассмотреть различные варианты продолжений.
 - Провести сравнительный анализ полученных способов.
 - Программно разработать данные методы.
- 2 Оптимально выбрать границы экстраполяции.**
 - Получить точные формулы для частных случаев $k = 1$, $k = 2$ (Эрмитово продолжение).
 - В остальных случаях - эмпирические алгоритмы или частичный перебор.

- 1 Исследовать различные варианты экстраполяции исходной функции с сохранением гладкости.**
 - Рассмотреть различные варианты продолжений.
 - Провести сравнительный анализ полученных способов.
 - Программно разработать данные методы.
- 2 Оптимально выбрать границы экстраполяции.**
 - Получить точные формулы для частных случаев $k = 1$, $k = 2$ (Эрмитово продолжение).
 - В остальных случаях - эмпирические алгоритмы или частичный перебор.
- 3 Провести вычислительные эксперименты и сравнить результаты.**

Формальная постановка задачи экстраполяции исходной функции

Имеем аналитически заданную функцию $f(x) \in C^k[a, b]$.

$$F_{A,B}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \\ \tilde{f}(x), & x \in [A, a) \cup (b, B] \\ 0, & x \notin [A, B] \end{cases} \in C^k(-\infty, +\infty)$$

Формальная постановка задачи экстраполяции исходной функции

$$\tilde{f}(x), x \in [A, a) :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}(x) \in C^k((A, a) \cup (b, B)), \\ \tilde{f}^{(i)}(a) = f^{(i)}(a), \\ \tilde{f}^{(i)}(A) = 0, \\ \tilde{f}^{(i)}(b) = f^{(i)}(b), \\ \tilde{f}^{(i)}(B) = 0. \end{array} \right. \quad (i = 0, 1, \dots, k)$$

Формальная постановка задачи экстраполяции исходной функции

Если функция f задана на равномерной сетке $\{x_i\}_{i=0}^m$ только значениями $\{f_i\}_{i=0}^m$, то

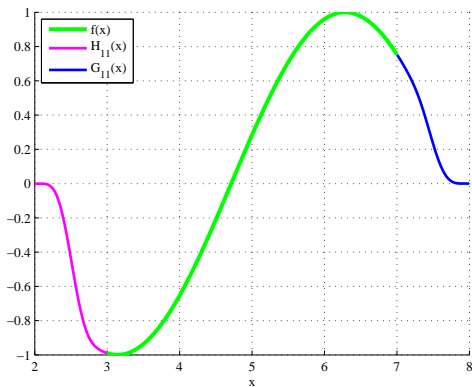
$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}(x) \in C^k((A, a) \cup (b, B)), \\ \tilde{f}(a) = f_0, \quad \tilde{f}^{(i)}(a) = \frac{\Delta_i f(a)}{h^i}, \\ \tilde{f}(A) = 0, \quad \tilde{f}^{(i)}(A) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ \tilde{f}(b) = f_m, \quad \tilde{f}^{(i)}(b) = \frac{\nabla_i f(b)}{h^i}, \\ \tilde{f}(B) = 0, \quad \tilde{f}^{(i)}(B) = 0. \end{array} \right.$$

Экстраполяция с помощью многочленов Эрмита

$$H_{2k+1}(x) = (x - A)^{k+1} \left[\sum_{j=0}^k f^{(j)}(a) \frac{(x - a)^j}{j!} \left[\sum_{m=0}^{k-j} (-1)^m C_{k+m}^k \cdot (a - A)^{-(m+k+1)} (x - a)^m \right] \right], \quad x \in [A, a).$$

Экстраполяция с помощью многочленов Эрмита

$$f(x) = \cos(x), \quad k = 5.$$



Экстраполяция с помощью многочленов Лагранжа

$L_{2k+1}(x)$ - многочлен Лагранжа, который в $2k + 2$ точках

$$\begin{aligned}\tilde{x}_0 &:= A - kh, & \tilde{x}_{k+1} &:= x_0, \\ \tilde{x}_1 &:= A - (k - 1)h, & \tilde{x}_{k+2} &:= x_1, \\ & \dots & & \dots \\ \tilde{x}_k &:= A, & \tilde{x}_{2k+1} &:= x_k.\end{aligned}$$

Экстраполяция с помощью многочленов Лагранжа

принимает соответственно значения

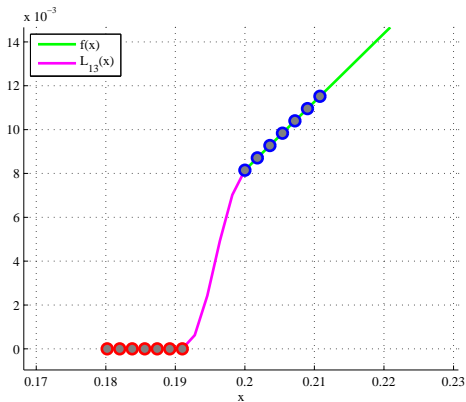
$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 &:= 0, & \tilde{f}_{k+1} &:= f_0, \\ \tilde{f}_1 &:= 0, & \tilde{f}_{k+2} &:= f_1, \\ & \dots & & \dots \\ \tilde{f}_k &:= 0, & \tilde{f}_{2k+1} &:= f_k. \end{aligned}$$

Экстраполяция с помощью многочленов Лагранжа

$$L_{2k+1}(x) = \sum_{i=0}^k f_i \prod_{j=0, j \neq i+k+1}^{2k+1} \frac{x - \tilde{x}_j}{\tilde{x}_{i+k+1} - \tilde{x}_j}, \quad x \in [A, a).$$

Экстраполяция с помощью многочленов Лагранжа

$$f(x) = \ln(x + 3) - 1.155, \quad k = 6.$$



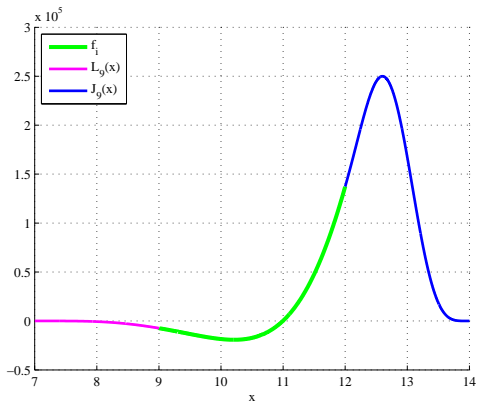
Экстраполяция с помощью многочленов Лагранжа

$$L_{2k+1}(x), \quad x \in [A, a) :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{2k+1}(x) \in C^k(A, a), \\ L_{2k+1}(a) = f(a), \quad \frac{\nabla_i L_{2k+1}(a)}{h^i} = \frac{\Delta_i f(a)}{h^i} + O(h), \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ L_{2k+1}(A) = 0, \quad \frac{\Delta_i L_{2k+1}(A)}{h^i} = O(h). \end{array} \right.$$

Экстраполяция с помощью многочленов Лагранжа

$$f_i = \cos(x_i) \cdot e^{x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, 1000; \quad k = 4$$



Экстраполяция с помощью кривых Безье

Кривая Безье

Кривая Безье - параметрическая кривая, задаваемая выражением

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \cdot b_{n,i}(t), \quad t \in [0, 1]$$

где $b_{n,i}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$, $\mathbf{P}_i = ((\mathbf{P}_i)_x, (\mathbf{P}_i)_y) \in \mathbb{R}^2$.

Экстраполяция с помощью кривых Безье

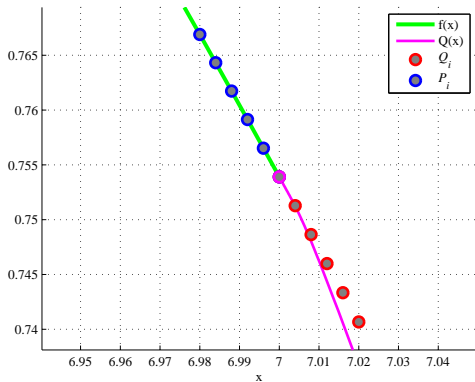
Опорные точки

$$\{\mathbf{Q}_i\}_{i=0}^{2k+1} : \forall j \ 1 \leq j \leq k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_{2k+1} := (a, f(a)), \\ \mathbf{Q}_0 := (A, 0), \\ \mathbf{Q}_{2k+1-j} := (a - jh, \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i-j} C_j^i [f(a + (j-i)h) - \\ - (\mathbf{Q}_{2k+1-i})_y] + f(a)), \\ \mathbf{Q}_j := (A + jh, 0). \end{array} \right.$$

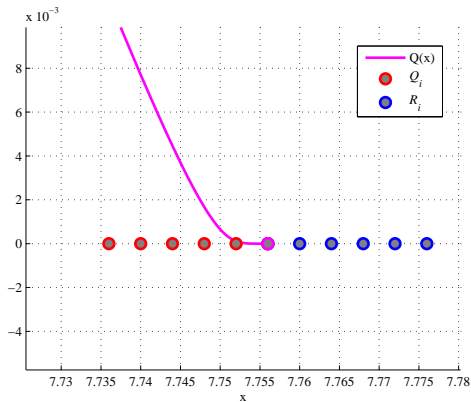
Экстраполяция с помощью кривых Безье

$$f(x) = \cos(x), \quad k = 5.$$



Экстраполяция с помощью кривых Безье

$$f(x) = \cos(x), \quad k = 5.$$



Сравнение трех способов экстраполяции

Вид операции		Метод продолжения		
		Эрмит	Лагранж	Кривые Безье
1.	Сложение	$\frac{(k+1)(k+4)}{2} + 1$	$3k+3$	$2k+2$
2.	Умножение	$\frac{(k^2+3k+4)(k+1)}{4}$	$2k+2$	$(2k+2)^2$
3.	Деление	0	k	0

Количество операций при подсчете функции продолжения в одной точке.

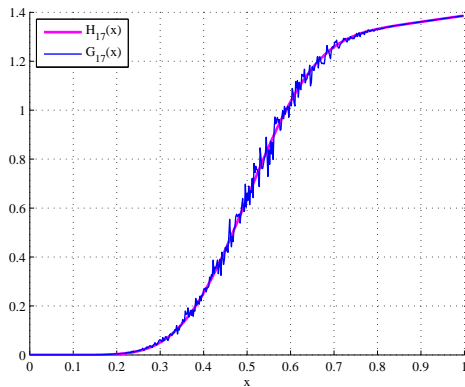
Сравнение трех способов экстраполяции

Вид операции		Метод продолжения		
		Эрмит	Лагранж	Кривые Безье
1.	Сложение	$(k+1)(k+2)$	$(2k+1)(k+1)$	$(2k+1)(k+1)$
2.	Умножение	$(k+1)(10,5k-1)$	$2k(k+1)$	$\frac{(2k+1)(2k+2)(4k+3)}{6}$
3.	Деление	$2(k+1)$	$k+1$	$(2k+1)(2k+2)$

Количество предварительных операций.

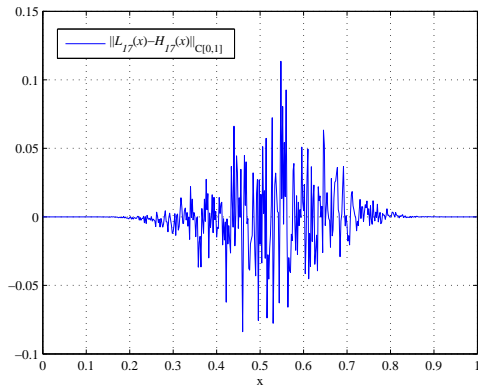
Сравнение трех способов экстраполяции

$$f_i = \ln(x_i + 3), \quad i = 0, 1, \dots, 1000; k = 8.$$



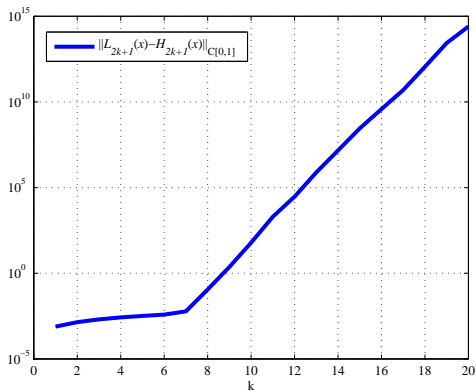
Сравнение трех способов экстраполяции

График функции $\|L_{17} - H_{17}\|_{C[0,1]}$.



Сравнение трех способов экстраполяции

График функции $\|L_{2k+1}(x) - H_{2k+1}(x)\|_{C[0,1]}$ при $k=1, \dots, 20$.



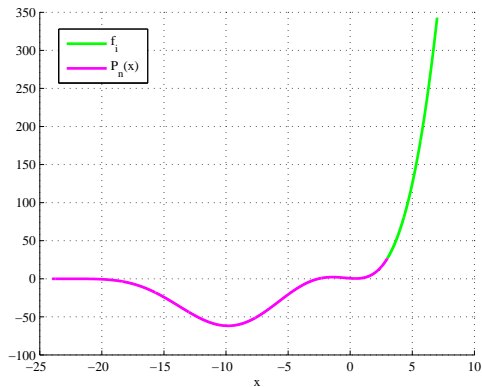
Выбор А, В. Вариант 1 эмпирического выбора

$$a - A = \left[\frac{|f(a)|}{h} \right] h \implies A := a - \left[\frac{|f(a)|}{h} \right] h,$$

$$B - b = \left[\frac{|f(b)|}{h} \right] h \implies B := b + \left[\frac{|f(b)|}{h} \right] h.$$

Выбор А, В. Вариант 1 эмпирического выбора

$$f_i = x_i^3, \quad i = 0, 1, \dots, 1000.$$



Выбор A , B . Вариант 2 эмпирического выбора

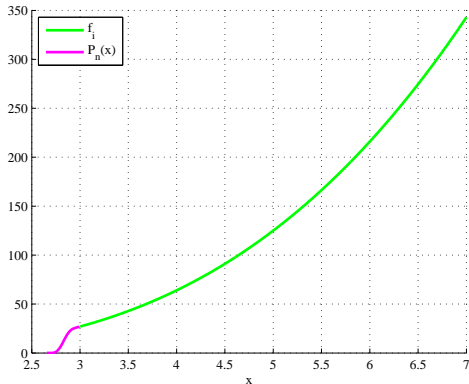
$$a - A = \left[\frac{|f(a)|}{M_f} \right] h \implies A := a - \left[\frac{|f(a)|}{M_f} \right] h,$$

$$B - b = \left[\frac{|f(b)|}{M_f} \right] h \implies B := b + \left[\frac{|f(b)|}{M_f} \right] h,$$

где $M_f = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} |\Delta_1 f(x_j)|$, h – шаг сетки.

Выбор А, В. Вариант 2 эмпирического выбора

$$f_i = x_i^3, \quad i = 0, 1, \dots, 1000.$$



Выбор A, B. Вариант 3 оптимального выбора A, B

$$\|F_{A,B}^{(k)}\|_{C(-\infty,+\infty)} \leq \|f^{(k)}\|_{C[a,b]}.$$

Выбор A, B. Вариант 3 оптимального выбора A, B

Если $\tilde{f}(x)$ ищем с помощью интерполяционных многочленов Эрмита то условия на $F_{A,B}(x)$ превратятся в

$$F_{A,B}(x) : \begin{cases} \|H_n^{(k)}\|_{C[A,a]} \leq \|f^{(k)}\|_{C[a,b]}, \\ \|G_n^{(k)}\|_{C[b,B]} \leq \|f^{(k)}\|_{C[a,b]}. \end{cases}$$

Выбор A, B . Случай Эрмитова продолжения при $k = 1$

$$H_3(x) = (x - A)^2 \left[f(a) \left[\frac{1}{(a - A)^2} - \frac{2(x - a)}{(a - A)^3} \right] + f'(a)(x - a) \left[\frac{1}{(a - A)^2} \right] \right].$$

Без ограничения общности $a = 0$,

$$H_3'(x) = \frac{(A - x)[-6f(0)x + Af'(0)(A - 3x)]}{A^3}.$$

Выбор A , B . Случай Эрмитова продолжения при $k = 1$

$$\begin{aligned}\|H'_3\|_{C[A,0]} &= \max_{x \in [A,0]} |H'_3(x)| = \max\{|H'_3(0)|, |H'_3(A)|, |H'_3(x_{crit})|\} = \\ &= \max\{|f'(0)|, 0, |H'_3(x_{crit})|\} = \max\{|f'(0)|, |H'_3(x_{crit})|\},\end{aligned}$$

$$\text{где } x_{crit} = \frac{3Af(0) + 2A^2f'(0)}{6f(0) + 3Af'(0)}, A \neq -\frac{2f(0)}{f'(0)}.$$

Выбор A , B . Случай Эрмитова продолжения при $k = 1$

Рассмотрим случай $f'(0)f(0) < 0$:

$$\begin{aligned}\|H'_3\|_{C[A,0]} \leq \|f'\|_{C[0,b-a]} &\Leftrightarrow \max\{|f'(0)|, |H'_3(x_{crit})|\} \leq \|f'\|_{C[0,b-a]} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |H'_3(x_{crit})| \leq \|f'\|_{C[0,b-a]} \Leftrightarrow \\ &\left| \frac{(Af'(0) + 3f(0))^2}{3A(2f(0) + Af'(0))} \right| \leq \|f'\|_{C[0,b-a]}.\end{aligned}$$

Выбор A , B . Случай Эрмитова продолжения при $k = 1$

Решением неравенства будет множество $(-\infty, A_1]$, где

$$A_1 = 3 \frac{f(0)(f'(0) - \|f'\|_{C[0,b-a]})}{f'(0)(3\|f'\|_{C[0,b-a]} - f'(0))} - \frac{|f(0)|\sqrt{\|f'\|_{C[0,b-a]}(\|f'\|_{C[0,b-a]} + f'(0))}}{f'(0)(3\|f'\|_{C[0,b-a]} - f'(0))}.$$

Таблица сравнения затрат по времени и погрешностей при использовании всплесков Добеши.

Способ продолжения	Числовые характеристики		
	Время	Погрешность ($C[1, 6]$)	Погрешность (L)
1. Нулем	0.0031	0.1065	0.2604
2. Осе-симметрически	0.0218	$1.8873 \cdot 10^{-4}$	$4.6112 \cdot 10^{-4}$
3. Точечно-симметрически	0.0312	$2.3540 \cdot 10^{-8}$	$7.1450 \cdot 10^{-8}$
4. Непрерывно	0.0265	$1.0117 \cdot 10^{-4}$	$2.5110 \cdot 10^{-4}$
5. Периодически	0.0328	0.0957	0.2373
6. Эрмитово	0.0733	$3.4784 \cdot 10^{-10}$	$6.3986 \cdot 10^{-10}$
7. Лагранжево	0.0374	$1.0134 \cdot 10^{-11}$	$3.9576 \cdot 10^{-11}$
8. Безье	0.0655	$7.1357 \cdot 10^{-5}$	$1.9451 \cdot 10^{-5}$

Таблица сравнения затрат по времени и погрешностей при использовании всплесков Добеши.

Вейвлеты		Числовые характеристики		
		Время	Погрешность ($C[1, 6]$)	Погрешно...
1.	Периодизированные	0.0094	0.0327	0.
2.	"Граничные"	0.4430	$3.7595 \cdot 10^{-8}$	1.470
3.	Периодизированные(Э)	0.0234	$3.9377 \cdot 10^{-9}$	1.556
4.	"Граничные"(Э)	0.4321	$8.7313 \cdot 10^{-9}$	4.123
5.	Периодизированные(Л)	0.0562	$7.2867 \cdot 10^{-9}$	3.032
6.	"Граничные"(Л)	0.9110	$2.4806 \cdot 10^{-8}$	4.650
7.	Стандартные(Э)	0.0733	$3.4784 \cdot 10^{-10}$	6.398
8.	Стандартные(Л)	0.0374	$1.0134 \cdot 10^{-11}$	3.957

Таблица сравнения затрат по времени и погрешностей при использовании койфлетов.

Вейвлеты		Числовые характеристики		
		Время	Погрешность ($C[1, 6]$)	Погрешно
1.	Периодизированные	0.0578	0.1381	0.1
2.	"Граничные"	0.7956	$2.2936 \cdot 10^{-8}$	6.650
3.	Периодизированные(Э)	0.5460	$2.1212 \cdot 10^{-10}$	1.931
4.	"Граничные"(Э)	2.0124	$1.0937 \cdot 10^{-9}$	2.288
5.	Периодизированные(Л)	0.0624	$4.0117 \cdot 10^{-9}$	8.010
6.	"Граничные"(Л)	0.9828	$4.7230 \cdot 10^{-9}$	2.591
7.	Стандартные(Э)	0.1248	$1.6255 \cdot 10^{-9}$	9.847
8.	Стандартные(Л)	0.1404	$1.6570 \cdot 10^{-9}$	9.847

Перспективы

- Перспектива 1
- Перспектива 2
- Перспектива 3
- Перспектива 4
- Перспектива 5

Результаты работы

- Результат 1
- Результат 2
- Результат 3
- Результат 4

Спасибо за внимание!