На правах рукописи

АВЕРБУХ Юрий Владимирович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2007

Работа выполнена в отделе управляемых систем Института математики и механики Уральского отделения РАН.

Научный руководитель:	член-корреспондент РАН Ченцов Александр Георгиевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Тарасьев Александр Михайлович, кандидат физико-математических наук Логинов Михаил Иванович
Ведущая организация:	Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

Защита состоится 25 октября 2007 года в 11 часов на заседании специализированного совета Д 004.006.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Институте математики и механики Уральского отделения РАН по адресу: 620219, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан 25 сентября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.–мат. наук Н.Ю. Лукоянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена изучению свойств решения игровой задачи наведения на множество. Под решением понимается множество успешной разрешимости.

Актуальность темы. Теория управления в настоящее время является разделом современной математики, связанным с оптимизацией динамических процессов, и находит многочисленные приложения. Основополагающее значение в этой теории имеет принцип максимума Л.С. Понтрягина. Задачи управления в условиях неопределенности формализуются в рамках теории дифференциальных игр. Такие задачи возникают при управлении техническими системами, осложненными действием помех. Содержательные постановки подобных задач отражены в монографии R.P. Isaacs[1]. Построение строгой теории задач конфликтного управления следует связать прежде всего с именами Н.Н. Красовского, Л.С. Понтрягина, Б.Н. Пшеничного и А.И. Субботина.

Существенное влияние на теорию дифференциальных игр оказали работы А.В. Кряжимского, А.Б. Куржанского, Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Осипова, Ф.Л. Черноусько, J.P. Aubin, T. Basar, P. Bernhard, J.V. Breakwell, L. Berkovitz, M.G. Crandall, R.J. Elliot, A. Friedman, N.J. Kalton, G. Leitmann, J. Lin, P.L. Lions, C. Ryll-Nardzewski, P. Varaiya.

Большой вклад в теорию дифференциальных игр и ее приложения внесли Э.Г. Альбрехт, В.Д. Батухтин, С.А. Брыкалов, Н.Л. Григоренко, П.Б. Гусятников, М.И. Зеликин, А.Ф. Клейменов, В.М. Кунцевич, А.А. Меликян, Н.Ю. Лукоянов, М.С. Никольский, В.В. Остапенко, В.С. Пацко, Н.Н. Петров, Л.А. Петросян, Е.С. Половинкин, Н.Н. Субботина, А.М. Тарасьев, В.Е. Третьяков, В.И. Ухоботов, В.Н. Ушаков, А.Г. Ченцов, А.А. Чикрий, С.В. Чистяков, M. Bardi, E.N. Barron, A. Blaquiere, I. Capuzzo Dolcetta, L.C. Evans, M. Falcone, R. Jensen, M. Ishii, J. Lewin, P. Soravia, P.E. Souganidis и многие другие ученые.

Предлагаемая работа лежит в русле работ уральской школы Н.Н. Красовского. Рассматриваются дифференциальные игры, в которых задача одного из игроков (обычно называемого игроком-союзником или первым игроком) состоит в наведении движения системы на множество M, содержащееся

[1] *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир. 1967. 480 с.

в пространстве позиций, с соблюдением фазовых ограничений, определяемых множеством N; второй игрок старается помешать наведению. Наиболее удобной как с точки зрения теории, так и с точки зрения приложений представляется позиционная формализация Н.Н. Красовского. В рамках этой формализации была установлена фундаментальная теорема об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина[2], которая утверждает существование решения вышеупомянутой дифференциальной игры в классе позиционных стратегий (из этой теоремы следует существование седловой точки в классе позиционных стратегий). Из результатов Н.Н. Красовского и А.И. Субботина следует, что разрешающая позиционная стратегия определяется множеством успешной разрешимости задачи наведения. Таким образом, задача построения разрешающей позиционной стратегии сводится к построению множества успешной разрешимости задачи наведения.

Заметим также, что множество успешной разрешимости задачи наведения в классе позиционных стратегий совпадает с множеством успешной разрешимости задачи наведения в классе квазистратегий первого игрока. Подход, основанный на использовании квазистратегий первого игрока, развит в работах E. Roxin[3], R.J. Elliot и N.J. Kalton[4], P. Varaiya и J. Lin[5], Н.Н. Красовского и А.Г. Ченцова[6] и многих других авторов. А.Г. Ченцов рассматривал дифференциальные игры в классе многозначных обобщенных квазистратегий[7]. Им же рассматривались вопросы построения седловой точки в классе квазистратегий[8].

Конкретное построение множества успешной разрешимости задачи наведения при выполнении условий регулярности удается реализовать на основе

---

[2] *Красовский Н. Н. Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи движения // ПММ, 1970, Т. 34, №6, С. 1005–1022, *Красовский Н.Н. Субботин А. И.* Позиционые дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 455 с.

[3] *Roxin E.* Axiomatic approach in differential games // J. Optimization Theory and Application, 1969, Vol. 3, No. 3, 153–163.

[4] *Elliot R.J. Kalton N.* The Existence of Value for Differential Games // Memoir of the American Mathematical Society, Vol. 126 (1972): iv + 67.

[5] *Varaiya P. J. Lin* Existence of saddle points in differential games // SIAM J. Control, 1969, Vol. 7, No. 1. P. 141–157.

[6] *Krasovskii N.N. Chentsov A.G.* On the design of differential games. I // J. Probl. Control and Inform. Theory, 1977, Vol.6, No. 5–6. P.381–395, *Krasovskii N.N. Chentsov A.G.* On the design of differential games. II // J. Probl. Control and Inform. Theory, 1979, Vol.9, No. 1. P.3–11.

[7] *Ченцов А.Г.* Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения // Депонировано в ВИНИТИ 1933-79Деп, 103 стр.

[8] *Ченцов А.Г.* Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения-уклонения // Дифференц. уравнения, 1980. Т.16, № 10. С.1801-1808

вспомогательных программных конструкций, т. е. средствами теории программного управления, восходящей к исследованиям Л.С. Понтрягина. В работах Н.Н. Красовского, А.Б. Куржанского, Ю.С. Осипова и их учеников была построена стройная теория программного управления, на базе которой позднее были разработаны эффективные методы решения регулярных дифференциальных игр[9]. В общем случае построение решения дифференциальной игры сводится к реализации последовательности решений игровых задач программного управления (метод программных итераций, предложенный А.Г. Ченцовым[10]). Рассматриваемый вариант метода программных итераций состоит в построении последовательности множеств, сходящейся к множеству успешной разрешимости[11] (другая версия метода программных итераций реализует построение функции цены игры). В связи с исследованием дифференциальных игр методом программных итераций отметим работы А.А. Меликяна[12], В.И. Ухоботова[13] и С.В. Чистякова[14]. Близкие к методу программных итераций подходы рассматривались в работе P. Cardaliaguet, M. Quincampoix, P. Saint-Pierre[15]. Также А.Г. Ченцов построил "прямой" вариант метода программных итераций, реализуемый в пространстве мультифункций, имеющих смысл откликов на воздействие помехи. Оба построенных варианта метода программных итераций находятся в двойственности. Аналоги метода программных итераций применялись А.И. Субботиным и А.Г. Ченцовым для построения обобщенного решения уравнения Гамильтона-Якоби.

Большой интерес представляет исследование структуры решения игровых задач управления и установление эквивалентности решений различных дифференциальных игр. Представление решения дифференциальной игры

[9] *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений.. М.: Наука. 1970. 420 с., *Красовский Н.Н.* Дифференциальная игра сближения-уклонения – I // Изв. АН СССР (Техническая кибернентика), 1973, №2, С. 3–18, *Красовский Н.Н.* Дифференциальная игра сближения-уклонения – II // Изв. АН СССР (Техническая кибернентика), 1973, №3, С. 22–42, *Красовский Н.Н. Субботин А. И.* Позиционые дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 455 с.

[10] *Субботин А.И. Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981. 288с., *Ченцов А.Г.* О структуре одной игровой задачи сближения // ДАН СССР, 1975, Т. 224, №6, С. 1272–1275, *Ченцов А.Г.* К игровой задаче наведения // ДАН СССР, 1976, Т. 226, №1, С. 73–76.

[11] *Субботин А.И. Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981. 288с.

[12] *Меликян А.А.* Цена игры в линейной дифференциальной игре сближения // ДАН СССР, 1977, т. 237, №3, С. 521–524

[13] *Ухоботов В.И.* Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // ПММ, 1977, т. 41, №2, С. 358–364

[14] *Чистяков С.В.* К решению игровых задач преследования // ПММ, 1977, т. 41, № 5, С. 825–832.

[15] *Cardaliaguet P. Quincampoix M., Saint-Pierre P.* Set-Valued Numerical Analysis for Optimal Control and Differential Games // Stochastic and Differential Games, Stochastic and Differential Games, No. 4 Annu. Internat. Soc. Dynam. Games, Birkhauser, Boston, 1999, pp. 177-247.

сближения-уклонения как множества успешной разрешимости получено благодаря теореме об альтернативе Н.Н.Красовского и А.И. Субботина. Дальнейшие исследования структуры связаны с работами Н.Н. Красовского, посвященными унификации дифференциальных игр[16] и стохастическому программному синтезу[17]. Структура решения игровых задач управления с информационной памятью исследована А.И.Субботиным[18]. Полезные результаты в области исследования геометрической структуры решения игровых задач наведения получены в работах А.Г. Ченцова[19], А.Г. Ченцова и В.Я. Рузакова [20], в которых исследовалось "устойчивость" мостов к операции объединения. Отметим также работы P.M. Cardaliguet, M. Quincampoix и P. Sent-Pierre[21].

В теории дифференциальных игр интенсивно изучаются задачи, в которых момент окончания процесса не фиксируется; эти задачи исследовались в работах Л.С. Понтрягина, где предполагалось, что момент окончания может изменятся от 0 до бесконечности. В диссертации исследуется структура задач наведения на ограниченное цилиндрическое множество в пространстве позиций (эти задачи также называются задачами наведения "к моменту"). Такие постановки охватываются теоремой об альтернативе Н.Н. Красовского, А.И. Субботина. Многие работы, посвященные этой задаче, используют вспомогательную задачу наведения на множество, содержащееся в гиперплоскости $t = \mathrm{const}$ (то есть задачу наведения "в момент"). Структура решения задачи наведение на множество "к моменту" в регулярном случае изучена в работах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина[22]. На основе построения решения уравнения Гамильтона-Якоби с дополнительными ограничениями в виде неравенств А.И. Субботиным было получено решение задачи наведения "к

[16] *Красовский Н.Н.* К задаче унификации дифференциальных игр // ДАН СССР, 1976, Т. 226, № 6, С. 1260-1263.

[17] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.. М.: Наука. 1985. 624с.

[18] *Субботин А.И.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью // ДАН СССР, 1972. Т.206, № 3. С.552-555.

[19] *Ченцов А.Г.* О некоторых свойствах множеств позиционного поглощения в дифференциальных играх сближения-уклонения // Задачи динамического управления, сборник науч. трудов: Свердловск, ИММ УНЦ РАН, 1981, С. 82–91,

[20] *Рузаков В.Я. Ченцов А.Г.* Об одной линейной дифференциальной игре сближения с невыпуклым целевым множеством // Дифференц. уравнения, 1984. Т.20, № 4. С.593-597.

[21] *Cardaliaguet P. Quincampoix M., Saint-Pierre P.* Set-Valued Numerical Analysis for Optimal Control and Differential Games // Stochastic and Differential Games, Stochastic and Differential Games, No. 4 Annu. Internat. Soc. Dynam. Games, Birkhauser, Boston, 1999, pp. 177-247.

[22] *Красовский Н.Н. Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 455с.

моменту” в случае игры с простыми движениями[23]; для этой задачи им получено выражение функции цены, аналогичное выражению для функции цены в задачи наведения “в момент”, полученному Б.Н. Пшеничным и М.И. Сагайдак. Вопросы построения решения задачи наведения на цилиндрическое множество рассматривались в работе I.M. Mitchel, A.M. Bayen, C.J. Tomlin[24]: решение задачи наведения на цилиндрическое множество в этой работе строилось как множество Лебега вязкостного решения вспомогательного уравнения типа Гамильтона-Якоби; построение решения использует преобразование исходной задачи к дифференциальной игре с фиксированным временем окончания. Подобная процедура используется и в настоящей диссертации.

Выделим также вопрос о реализуемости множества успешной разрешимости задачи наведения посредством метода программных итераций. В этой области в работах А.Г. Ченцова[25] и В.И. Ухоботова[26] получены результаты, касающиеся условий, при которых метод программных итераций стабилизируется после конечного и небольшого числа итераций. Обычно аналитически удается построить лишь некоторое число итераций. В связи с этим, возникает вопрос о реализации метода экстремального сдвига на нестабильное множество. Случай, когда множество, на которое осуществляется прицеливание, близко к множеству успешной разрешимости в инфинитезимальном смысле, рассматривался[27] В.Н. Ушаковым и Я.А. Латушкиным.

В диссертации исследуются вопросы структуры решения дифференциальных игр, понимаемого как множество успешной разрешимости задачи наведения. Также рассматривается вопрос о характере сходимости метода программных итераций и построении позиционных стратегий, приближающих (в смысле гарантированного результата) оптимальную.

Цель работы. Исследование следующих свойств множества успешной разрешимости игровой задачи наведения: непрерывная зависимость сече-

[23] *Субботин А.И.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Ижевск: РХД. 2003. 336 с.

[24] *Mitchel I.M. Bayen A.M., Tomlin C.J.* A Time-Depend Hamilton-Jacobi Formulation of Reachable Sets for Continuous Dynamic Games // IEEE Transaction on Automatic Control, 2005, Vol. 50, No. 7, Pp. 947–957.

[25] *Субботин А.И. Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981. 288с., *Ченцов А.Г* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Матем. сб., 1976, Т. 99, №3, С.394–420.

[26] *Ухоботов В.И.* К построению стабильного моста в игре удержания // ПММ, 1981, т. 45, №2, С. 237–240, *Ухоботов В.И.* К вопросу об окончанию игры за первый момент поглощения // ПММ, 1984, т. 48, №6, С. 892–897.

[27] *Ушаков В.Н. Латушкин Я.А.* Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Труды ИММ УрО РАН, 2006, Т.12, №2, С.178-194.

ний от времени, связность сечений; преобразование игровых задач наведения на цилиндрическое множество к задачам наведения на основание цилиндра; построение аналогов метода экстремального сдвига Н.Н. Красовского и А.И. Субботина с использованием прицеливания на нестабильное множество.

Методы исследования. В основе работы лежат методы теории управления и теории позиционных дифференциальных игр, теория расширения экстремальных задач управления и конструкции метода программных итераций. Используются элементы общей топологии и теории меры.

Научная новизна. Построен пример дифференциальной игры, в которой сечения разрывно зависят от времени и являются несвязными (целевое множество при этом связно). Получены достаточные условия непрерывной зависимости сечений от времени и связности сечений. Предложен метод построения дифференциальной игры с заданным множеством успешной разрешимости. Рассмотрена задача наведения автономной конфликтно управляемой системы на цилиндрическое множество. Этой задаче сопоставлена задача наведения преобразованной системы на основание цилиндра. Доказано, что последовательности множеств, построенные по методу программных итераций для обеих задач, совпадают. Исследован характер сходимости метода программных итераций в случае компактного целевого множества. На этой основе построены аппроксимативные аналоги правила экстремального сдвига Н.Н. Красовского и А.И. Субботина и экстремального управления с поводырем. Результаты диссертационной работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в работе теоретические результаты дают представление о геометрической структуре множества успешной разрешимости в игровой задаче наведения и о характере сходимости метода программных итераций. Предложенный в работе метод построения дифференциальной игры с заданным множеством успешной разрешимости задачи наведения позволяет исследовать структуру класса решений нелинейных дифференциальных игр сближения-уклонения. Практическая ценность работы состоит в том, что полученные свойства могут быть применены при изучении различных методов решения задач игрового управления. В частности, решение игровой задачи наведения автономной конфликтно-управляемой системы на цилиндрическое множество при весьма общих предположениях может быть сведено к решению задачи наведения преобразованной системы на основание цилиндра, благодаря тому, что доказано совпадение последовательностей, построенных по методу программных итераций для обеих задач. Упомянутое свойство совпадения последовательностей может быть использовано при построении управления в задачах уклонения от множества, в которых ограничено число переключений управления одного из игроков. Построены аппроксимативные аналоги правила экстремального сдвига, для реализации которых не требуется построение множества успешной разрешимости, а достаточно построения некоторого приближения к нему.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 118 страниц, набранных в текстовом редакторе LATEX, библиографический список включает 141 наименование.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международном семинаре "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби" (Екатеринбург, 22–26 июня 2005 года), международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 10–15 июля 2006 года), IX съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 года), международной конференции "Моделирование и исследование устойчивости динамических систем" (Киев, 22-25 мая 2007 года), международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 22–27 июня 2007 года), Symposium on Functional Differential Equations (September, 11–15, Ariel, Israel), межрегиональной конференции "Современные математические методы и информационные технологии в образовании" (Тюмень, 14–15 апреля, 2005); семинарах отдела управляемых систем и отдела динамических систем ИММ УрО РАН, семинаре кафедры дифференциальных уравнений Удмуртского государственного университета, семинаре отдела оптимизации управляемых процессов Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

Публикации. Основной материал диссертации опубликован в работах [1]–[13]. В совместных с А.Г. Ченцовым работах [2]–[6], [13] А.Г. Ченцову принадлежат постановки задач и некоторые идеи доказательств.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается краткий обзор литературы, относящейся к игровым задачам наведения, определяется цель работы, излагаются основные результаты диссертации.

Первая глава состоит из трех параграфов. Она является вводной и посвящена основным постановкам и методам, связанным с применением обобщенных управлений в динамических системах, теории дифференциальных игр и метода программных итераций.

Рассматривается управляемая система:

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \ t \in [t_0, \vartheta_0]. \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовое состояние системы, $u \in P$ – управление первого игрока, $v \in Q$ – управление второго игрока; P и Q – компакты в конечномерных пространствах. Предполагается, что функция f удовлетворяет условиям локальной липшицевости и подлинейного роста по второй переменой. Рассматриваемая задача первого игрока состоит в том, чтобы привести траекторию системы на множество M, не покидая множества N. Второй игрок стремится помешать этому. Задачу первого игрока будем называть задачей (M, N)-наведения. Задачу второго игрока естественно называть задачей уклонения. На множества M и N наложены следующие условия: $M \subset N \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, M, N замкнуты.

Используется формализация, предложенная в работах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина[28]. Полагаем, что первый игрок выбирает свое управление в классе контрстратегий, а второй игрок в классе позиционных стратегий[29]. В случае, если выполняется условие седловой точки в маленькой игре (условие Айзекса), то предполагается, что оба игрока выбирают свое управление в классе позиционных стратегий.

Рассматриваются порожденные контрстратегией первого игрока пошаговые движения (ломаные Эйлера) и их пределы при стремлении мелкости разбиения к нулю – конструктивные движения Н.Н. Красовского. Структура решения задачи (M, N)-наведения определяется теоремой об альтернативе, установленной Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным. Согласно теореме об альтернативе, множество N (вне N очевидно разрешима задача второго игрока) допускает разбиение в сумму двух подмножеств: множества успешной

[28] *Красовский Н.Н. Субботин А. И.* Позиционые дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 455 с.

[29] Если обоим игрокам не известно управление противника, то управления игроков могут быть выбраны в классе смешанных стратегий.

разрешимости задачи наведения, и множества успешной разрешимости задачи уклонения. При этом множество успешной разрешимости задачи наведения является максимальным u-стабильным мостом[30].

Определение 1. Множество $W \subset N$ называется u-стабильным мостом в задаче (M, N)-наведения, если для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$ и любого постоянного управления второго игрока $v_* \in Q$ существует решение дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, y(t), u, v_*) : u \in P\},$$

удовлетворяющее начальному условию $y(t_*) = x_*$, такое, что для некоторого $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$ справедливы включения: $y(\tau) \in M[\tau]$ и $y(t) \in W[t]$ $\forall t \in [t_*, \tau]$.

Здесь (и ниже) $E[t]$ – сечение множества $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ гиперплоскостью $t = \mathrm{const}$, $E[t] = \{x : (t, x) \in E\}$.

При этом вид разрешающей контрстратегии (позиционной стратегии, в случае выполнения условия седловой точки в маленькой игре) также дается теоремой об альтернативе. Оптимальная контрстратегия – контрстратегия, экстремальная к множеству успешной разрешимости.

Таким образом, задача (M, N)-наведения для дифференциальной игры сведена к задаче построения множества успешной разрешимости. В дальнейшем под решением задачи наведения понимается именно множество успешной разрешимости. Один из методов построения множества успешной разрешимости есть метод программных итераций, предложенный А.Г. Ченцовым. Конструкция метода программных итераций использует понятие обобщенных управлений (мер-управлений)[31].

Пусть $t \in [t_0, \vartheta_0]$. Рассмотрим множество $\mathcal{R}_t$ всех мер на борелевских σ-алгебрах подмножеств $[t, \vartheta_0] \times P$, согласованных с мерой Лебега на $[t, \vartheta_0]$ (ее будем обозначать через λ). Будем говорить, что мера μ на $[t, \vartheta_0] \times P$ согласована с мерой Лебега λ, если для любого измеримого подмножества Γ отрезка $[t, \vartheta_0]$ выполнено равенство $\mu(\Gamma \times P) = \lambda(\Gamma)$. Аналогично, рассмотрим множества всех мер на борелевских σ-алгебрах подмножеств $[t, \vartheta_0] \times Q$ и

[30] Используемое в диссертации определение для случая замкнутых множеств эквивалентно определению, данному в книге *Красовский Н.Н. Субботин А. И.* Позиционые дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 455 с.

[31] *Гамкрелидзе Р. В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та. 1977. 254 с., *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука. 1977. 624 с.

$[t, \vartheta_0] \times P \times Q$, согласованных с мерой Лебега. Обозначим эти множества через $\mathcal{E}_t$ и $\mathcal{H}_t$ соответственно. Элементы множества $\mathcal{R}_t$ являются обобщенными аналогами управлений первого игрока, элементы множества $\mathcal{E}_t$ – аналогами управлений второго игрока, элементы множества $\mathcal{H}_t$ – аналогами пар управлений $(u(\cdot), v(\cdot))$. Если $\nu \in \mathcal{E}_t$, то множество мер из $\mathcal{H}_t$, согласованных с ν, непусто. Обозначим его через $\Pi_t[\nu]$.

Для $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, через $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)$ обозначаем траекторию системы (1), порожденную мерой ν, выходящую из позиции (t_*, x_*). Аналогично, если $\mu \in \mathcal{R}_{t_*}$, $v_* \in Q$, то через $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu, v_*)$ обозначаем (обобщенную) траекторию системы (1), порожденную обобщенным управлением первого игрока μ и обычным управлением второго игрока v_*, выходящую из позиции (t_*, x_*).

Рассматриваются два варианта метода программных итераций. Варианты различаются операторами программного поглощения, действующими в пространстве замкнутых подмножеств $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. Эти операторы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(E) \triangleq \{(t_*, x_*) \in E : \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}\ \exists \eta \in \Pi_{t_*}[\nu]\ \exists \tau \in [t_*, \vartheta_0] :& \\ ((\varphi(\tau, t_*, x_*, \eta) \in M[\tau]) \& (\varphi(t, t_*, x_*, \eta) \in E[t]\ \forall t \in [t_*, \tau]))\},&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A(E) \triangleq \{(t_*, x_*) \in E : \forall v \in Q\ \exists \mu \in \mathcal{R}_{t_*}[\nu]\ \exists \tau \in [t_*, \vartheta_0] :& \\ ((\varphi(\tau, t_*, x_*, \mu, v) \in M[\tau]) \& (\varphi(t, t_*, x_*, \mu, v) \in E[t]\ \forall t \in [t_*, \tau]))\}.&\end{aligned}$$

Определим теперь последовательности $\{\mathcal{W}_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{W_k\}_{k=0}^{\infty}$ подмножеств N:

$$\mathcal{W}_0 \triangleq N,\ \mathcal{W}_k \triangleq \mathbb{A}(\mathcal{W}_{k-1}),\ k \in \mathbb{N},$$

$$W_0 \triangleq N,\ W_k \triangleq A(W_{k-1}),\ k \in \mathbb{N}.$$

Определение стабильного моста может быть дано в терминах оператора A: множество W является u-стабильным мостом, если $W = A(W)$. Вариант метода программных итераций, определяемый оператором A, называется также методом итераций стабильности.

В диссертации используется следующее представление множества успеш-

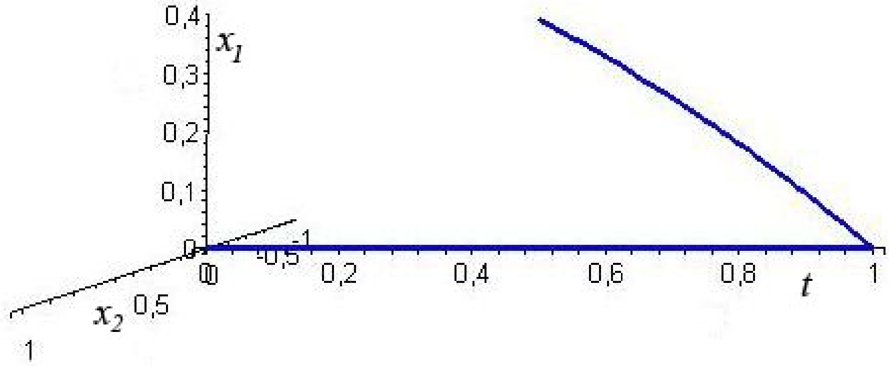

Рис. 1: Множество K.

ной разрешимости задачи (M, N)-наведения $\mathfrak{W}$, полученное А.Г. Ченцовым[32]:

$$\mathfrak{W} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k.$$

Вторая глава состоит из четырех параграфов. Она посвящена вопросам структуры решения дифференциальной игры сближения-уклонения: исследуется множество успешной разрешимости задачи наведения.

В параграфе 2.1 показано, что в общем случае сечения дифференциальной игры разрывно зависят от времени и могут быть несвязными даже в случае связного целевого множества. Построен следующий пример.

Пусть $K \subset [0,1] \times \mathbb{R}^2$,

$$K \triangleq ([0,1] \times \{0\} \times \{0\}) \cup \{(t, x_1) : t \in [1/2, 1], x_1 = 1 - \exp(t-1)\} \times \{0\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Через K_ε обозначим дополнение до ε-окрестности множества K в пространстве $[0,1] \times \mathbb{R}^2$.

Определим функцию $\chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2) : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2) \triangleq \frac{\mathbf{d}((t, x_1, x_2), K_\varepsilon)}{\mathbf{d}((t, x_1, x_2), K_\varepsilon) + \mathbf{d}((t, x_1, x_2), K)};$$

здесь $\mathbf{d}((t, x_1, x_2), E)$ – расстояние от (t, x_1, x_2) до множества $E \subset [0,1] \times \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим дифференциальную игру с фиксированным временем окончания для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & u_1 \\ \dot{x}_2 = & \chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2) u_2 - v, \end{cases}$$

[32] *Субботин А.И. Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981. 288с.

$t \in [0,1]$, $u_1, u_2, v \in [-1,1]$. В качестве целевого множества рассмотрим множество $M = \{(1,0,0)\}$, фазовые ограничения положим равными всему пространству позиций $N = [0,1] \times \mathbb{R}^2$. Для этой задачи наведения множество K является множеством успешной разрешимости.

Как видно из структуры множества K, сечения множества K разрывно зависят от времени и при $t \in [1/2, 1]$ являются несвязными множествами (см. рис. 1).

В параграфе 2.2 предложен более общий метод построения дифференциальной игры наведения с заданным априори решением. Обозначим предполагаемое целевое множество через M, предполагаемое множество успешной разрешимости задачи наведения на M через W. Мы рассматриваем задачи наведения без фазовых ограничений, то есть предполагается, что $N = [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. Пусть $n = m+1$, $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть $M \subset W \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^m \times \{0\}$, M и W замкнуты, и существует $R > 0$ со свойством*

$$\forall (t^*, x^*) \in W \ \exists \hat{t} > t^* (\exists \hat{x} \in M[\hat{t}] : \|\hat{x} - x^*\| \leq R|\hat{t} - t^*|) \ \& \\ (\forall t \in (t^*, \hat{t}) \ \exists x \in W[t] : \ \|x - x^*\| \leq R|t - t^*|).$$

Тогда существует дифференциальная игра, удовлетворяющая условию седловой точки в маленькой игре, такая, что W является множеством успешной разрешимости задачи $(M, \mathbb{R}^{m+1})$-наведения в этой игре.

Параграф 2.3 посвящен достаточным условиям, при которых в задаче (M, N)-наведения для фиксированной конфликтно-управляемой системы вида (1) сечения множества успешной разрешимости непрерывно зависят от времени (в смысле Какутани) и являются связными множествами в случае связности целевого множества. Обозначим множество успешной разрешимости в задаче (M, N)-наведения для системы (1) через $\mathfrak{W}$.

Определение 2. Будем говорить, что множество $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ не возрастает по сечениям, если для всех $t_1, t_2 \in [t_0, \vartheta_0]$, $t_1 \geq t_2$, выполнено включение $E[t_1] \subset E[t_2]$.

Пусть $z : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывная функция, локально липшицевая по фазовой переменной, удовлетворяющая по ней условию подлинейного роста. Решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = z(t, x)$$

с начальными условиями $z(t_*) = x_*$, определенное на всем промежутке $[t_0, \vartheta_0]$ обозначим через $\phi_z(\cdot, t_*, x_*)$. Для каждой позиции $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ положим $\psi_z(t_*, x_*) \triangleq \phi_z(t_0, t_*, x_*)$. Также $y = \psi_z(t, x)$ тогда и только тогда, когда $x = \phi_z(t, t_0, y)$. Будем называть множество $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ *z-невозрастающим по сечениям*, если множество $\Psi_z(E) \triangleq \{(t, \psi_z(t, x)) : (t, x) \in E\}$ не возрастает по сечениям. Мы рассматриваем сечение множества $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ как многозначное отображение $t \mapsto E[t]$.

Теорема 2. *Предположим, что для системы (1) выполнено условие седловой точки в маленькой игре. Рассмотрим задачу (M, N)-наведения для системы (1). Пусть также существует непрерывная функция $z(\cdot, \cdot) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая по второй переменной условиям локальной липшицевости и подлинейного роста такая, что N есть z-невозрастающее по сечениям множество, и $H(t, x, s) \leq \langle s, z(t, x) \rangle$ для всех $(t, x) \in N$, $s \in \mathbb{R}^n$. Тогда*

1. *если отображение $t \mapsto M[t]$ непрерывно справа, то отображение $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$ непрерывно;*

2. *если $M \subset \{\vartheta_0\} \times \mathbb{R}^n$ и M линейно связно, то и множества $\mathfrak{W}[t]$, $t \in [t_0, \vartheta_0]$ – линейно связные множества.*

Два важных частных случая, когда заключения теоремы 2 выполнены (предполагается, что условие седловой точки в маленькой игре выполнено):

1. множество N не возрастает по сечениям, и $H(t, x, s) \leq 0$ для всех $(t, x) \in N$, $s \in \mathbb{R}^n$;

2. функция f представляется в виде $f(t, x, u, v) = g(t, x) + h(t, u, v)$ для некоторых функций $g : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $h : [t_0, \vartheta_0] \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$; также N есть g-невозрастающее по сечениям множество, и

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, h(t, u, v) \rangle \leq 0 \; \forall t \in [t_0, \vartheta_0] \; \forall s \in \mathbb{R}^n.$$

Параграф 2.4 посвящен исследованию решения в задаче наведения на цилиндрическое множество автономной системы

$$\dot{x} = f(x, u, v), \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in P, \ v \in Q$$

на промежутке $[0, \vartheta]$. Рассматривается задача наведения на множество $M^{(1)} = [0, \vartheta] \times F$ (F – замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$) внутри множества N.

Этой задаче сопоставим задачу наведения внутри множества N на множество $M^{(2)} = \{\vartheta\} \times F$ для системы

$$\dot{x} = u_0 \cdot f(x, u, v), \ x \in \mathbb{R}^n, \ u_0 \in \{0, 1\}, \ u \in P, \ v \in Q.$$

Система рассматривается на отрезке времени $[0, \vartheta]$. Первый игрок распоряжается управлениями u_0 и u, второй игрок, как и в исходной системе, – управлением v. Обозначим множество успешной разрешимости в исходной задаче через $\mathfrak{W}^{(1)}$, в преобразованной, как и в исходной задаче, – через $\mathfrak{W}^{(2)}$. Последовательности, построенные по методу итераций стабильности для исходной и преобразованной задачи, обозначим через $\{W_k^{(1)}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{W_k^{(2)}\}_{k=0}^{\infty}$.

Теорема 3. *Пусть N является невозрастающим по сечениям множеством. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $W_k^{(1)} = W_k^{(2)}$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$*;*
2. $\mathfrak{W}^{(1)} = \mathfrak{W}^{(2)}$*;*
3. *если исходная система удовлетворяет условию седловой точки в маленькой игре, то и преобразованная система также удовлетворяет условию седловой точки в маленькой игре.*

Обозначим гамильтонианы игр через $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ соответственно. Показано, что $H^{(2)}(x, s) = \min\{0, H^{(1)}(x, s)\}$. Таким образом, $H^{(2)}(x, s) \le 0$ $\forall s, x \in \mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что (при условии седловой точки в маленькой игре) сечения множества успешной разрешимости в игровой задаче наведения на цилиндрическое множество для автономной системы непрерывно зависят от времени. Также они являются связными множествами в случае связности множества F.

Третья глава посвящена изучению характера сходимости метода программных итераций и свойствам аппроксимативных аналогов метода программных итераций. При этом прицеливание осуществляется на множества, являющиеся элементами последовательности, построенной по методу программных итераций. На протяжении всей главы предполагается, что целевое множество M компактно и непусто.

Параграф 3.1 посвящен характеру сходимости метода программных итераций.

Теорема 4. *Множества* $\mathfrak{W}$, W_k, $\mathcal{W}_k$ *компакты для* $k \in \mathbb{N}$. *Имеет место сходимость последовательностей* $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\mathcal{W}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *к* $\mathfrak{W}$ *в метрике Хаусдорфа.*

Следствие. *Пусть зафиксировано* $t \in [t_0, \vartheta_0]$. *Тогда множества* $\mathfrak{W}[t]$, $W_k[t]$, $\mathcal{W}_k[t]$ *компакты для* $k \in \mathbb{N}$. *В случае, когда* $\mathfrak{W}[t]$ *непусто, имеет место сходимость последовательностей* $\{W_k[t]\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\mathcal{W}_k[t]\}_{k=1}^{\infty}$ *к* $\mathfrak{W}[t]$ *в метрике Хаусдорфа.*

Параграф 3.2 посвящен построению аппроксимативного аналога метода экстремального сдвига Н.Н. Красовского и А.И. Субботина. Пусть условие седловой точки в маленькой игре выполнено, $N = [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. Стратегию, экстремальную к множеству $\mathcal{W}_k$, обозначим через $\mathcal{U}_k$. Если U – некоторая позиционная стратегия, (t_*, x_*) – начальная позиция, Δ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, то через $X_\Delta[t_*, x_*, U]$ обозначим соответствующий пучок ломаных Эйлера. Через $d(x, C)$ обозначим расстояние от точки в фазовом пространстве x до множества $C \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 5. *Пусть* $\tau_* \in [t_0, \vartheta_0]$ *такой момент времени, что* $\mathfrak{W}[\tau_*] \neq \varnothing$, *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения отрезка* $[\tau_*, \vartheta_0]$ $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^{m}$, *удовлетворяющего условию* $\max_{j=\overline{0,m-1}}(\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \delta$, *существует* $K \in \mathbb{N}$ *со свойством: для любого* $k > K$, *любого* $x_* \in \mathcal{W}_k[\tau_*]$ *и каждого движения* $x[\cdot] \in X_\Delta[\tau_*, x_*, \mathcal{U}_k]$

$$\exists \vartheta \in [t_0, \vartheta_0] : d(x[\vartheta], M[\vartheta]) \leq \varepsilon.$$

Аналогичная теорема (теорема 6) справедлива и для случая прицеливания на множества W_k.

В параграфе 3.3 построена конструкция модификация конструкции параграфа 3.2 для случая процедуры управления с поводырем Н.Н. Красовского и А.И. Субботина. Особенностью данной модификации является построение переходной функции поводыря. Получены оценки расстояния от пучка конструктивных движений, порождаемого модифицированной процедурой управления с поводырем, до целевого множества (теоремы 7 и 8).

Основные результаты диссертации

1. Показано, что в общем случае структура множества успешной разрешимости задачи наведения является нерегулярной в следующем смысле: сечения множества успешной разрешимости (гиперплоскостью, получающейся при фиксации момента времени) разрывно зависят от времени и могут быть несвязными множествами даже в случае связности целевого множества.

2. Найдены достаточные условия того, что сечения множества успешной разрешимости непрерывно зависят от времени и являются связными множествами.

3. Исследована задача наведения на цилиндрическое множество автономной конфликтно-управляемой системы. Этой задаче сопоставлена задача наведения на основание цилиндра преобразованной системы. Показано, что последовательности, построенные по методу программных итераций для обеих задач, совпадают. Также совпадают множества успешной разрешимости в обеих задачах.

4. Построены аппроксимативные аналоги правил экстремального сдвига и управления с поводырем Н.Н. Красовского и А.И. Субботина. В этом случае прицеливание осуществляется на множества, являющиеся элементами последовательности, построенной по методу программных итераций.

Автор глубоко благодарен научному руководителю член-корреспонденту РАН Ченцову Александру Георгиевичу за постоянное внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

[1] *Авербух Ю.В.* Об одном аппроксимативном аналоге правила экстремального сдвига // Дифференциальные уравнения, 2007, Т. 43, №8, с. 1011–1018.

[2] *Авербух Ю.В. Ченцов А.Г.* К вопросу о приближенной реализации сечений множеств позицонного поглощения в одной игровой задаче управления // Вестник УГТУ-УПИ (Серия радиотехническая), 2005, № 17 (69), С. 217–230.

[3] *Авербух Ю.В. Ченцов А.Г.* О характере сходимости в одной процедуре метода программных итераций // Труды семинара "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби", 2006, Т. 1, С. 166–175.

[4] *Авербух Ю. В. Ченцов А. Г.* Об одной оценке, связанной с методом программных итераций // Межрегиональная конференция "Современные математические методы и информационные технологии в образовании". Тезисы докладов., Тюмень, 2005, С. 3-5.

[5] *Авербух Ю. В. Ченцов А. Г.* Некоторые свойства процедур, связанных с методом программных итераций // Дифференциальные уравнения и процессы управления (электронный журнал), 2005, № 3, С. 38-62.

[6] *Авербух Ю.В. Ченцов А.Г.* Некоторые конструкции, связанные с методом программных итераций в нелинейных задачах управления // Аннотации докладов IX Съезда по теоретической и прикладной механике, 2006, Т. 1, С. 8-9.

[7] *Авербух Ю.В.* К вопросу о структуре множества позиционного поглощения в игровой задаче наведения // Проблемы управления и информатики, 2006, № 3, С. 5-9.

[8] *Авербух Ю.В.* Один метод построения конфликтно-управляемых систем с заданными свойствами // Тезисы международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Владимир, 2006, С. 16-18.

[9] *Авербух Ю.В.* Об одной модификации правил экстремального сдвига Н.Н.Красовского и А.И.Субботина // Дифференциальные уравнения и процессы управления (электронный журнал), 2006, №4, С. 30-49.

[10] *Авербух Ю.В.* Метод программных итераций в задачах наведения для автономных конфликтно-управляемых систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления (электронный журнал), 2007, №1, С. 74-90.

[11] *Авербух Ю.В.* Достаточные условия непрерывной зависимости сечений множества успешной разрешимости в игровой задаче наведения // Тезисы международной конференции по математической теории управления и механике. Владимир, 2007, С. 4-5.

[12] *Авербух Ю. В.* О задаче наведения автономной конфликтно-управляемой системы на цилиндрическое множество // Тезисы международной конференции "Моделирование и исследование устойчивости динамических систем". Киев, 2007, С. 19.

[13] *Averboukh Yu.V. Chentsov A.G* On Character of Convegence of the Programmed Iteration Method for Control Problem with Elements of Uncertatainty // Functional Differential Equations, 2007, V. 14, No 1, Pp. 21–46.

Авербух Юрий Владимирович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

Автореферат

Подписано в печать 18.09.2007
Формат 60x84 1/16. Объем 1 п.л.
Тираж 150 экз. Заказ №