Некоторые свойства структуры множества успешной разрешимости в игровой задаче наведения

Юрий Авербух

Институт математики и механики УрО РАН
Екатеринбург, Россия

Международная конференция
по математической теории управления и механике.
Суздаль, 22-27 июня 2007

Постановка задачи

Конфликтно-управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, u, v),$$

$$t \in [t_0, \vartheta_0], \; x \in \mathbb{R}^n, \; u \in P, \; v \in Q.$$

Управление первого игрока: u, второго: v.

Задача первого игрока

Привести систему на множество M.

$$M \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n.$$

Условия:

- P и Q – компакты в конечномерном пространстве;
- M замкнуто;
- $f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ – непрерывна;
- f липшицева по переменной x;
- f удовлетворяет условию подлинейного роста по x.

$\forall (t,x) \in N \ \forall s \in \mathbb{R}^n$

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle s, f(t,x,u,v)\rangle = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle s, f(t,x,u,v)\rangle$$

Стратегии и движения

Формализация Н.Н.Красовского

Пусть $U : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to P$ – позиционная стратегия, (t_*, x_*) – некоторая позиция, $v[\cdot]$ – управление второго игрока, $\Delta = \{t_* = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = \vartheta_0\}$ – разбиение отрезка. Функция, удовлетворяющая условиям:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), U(\tau_i, x(\tau_i)), v[t]), t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$$

$x(t_*) = x_*$ называется ломаной Эйлера.

Конструктивные движения

Пределы ломаных Эйлера при стремлении мелкости разбиения к нулю называются конструктивными движениями, порожденными стратегией U, выходящими из позиции (t_*, x_*).

Стабильность

Структура решения дифференциальной игры характеризуется теоремой об альтернативе, установленной Н.Н.Красовским и А.И.Субботиным.

Определение

Множество $W \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ называется u-стабильным мостом если: $\forall (t_*, x_*) \in W \; \forall v_* \in Q \; \exists y(\cdot)$

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, y(t), u, v_*) : u \in P\}, \;\; y(t_*) = x_*, \; \exists \theta \in [t_*, \vartheta_0] :$$
$$((\theta, y(\theta) \in M) \& \; ((t, y(t)) \in W \; \forall t \in [t_*, \theta]).$$

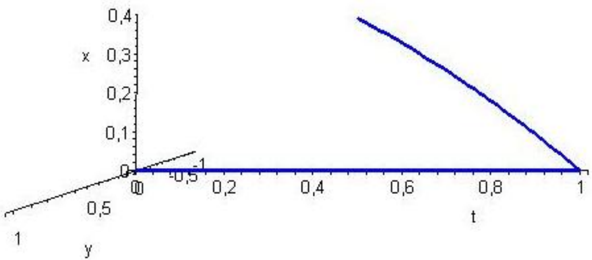
Множество успешной разрешимости задачи наведения

Обозначение

$\mathfrak{W}$ – максимальный u-стабильный мост.

Оптимальная стратегия первого игрока – стратегия, экстремальная к множеству $\mathfrak{W}$.

Вид множества



Множество успешной разрешимости задачи наведения:

$$W \triangleq \{(t, x_1, 0) : t \in [1/2, 1],\ x_1 = 1 - \exp(t-1)\} \cup \cup\{(t, 0, 0) : t \in [0, 1]\}$$

Дифференциальная игра

Управляемая система

$$\dot{x}_1 = u_1$$

$$\dot{x}_2 = \chi_{W,\varepsilon}(t, x_1, x_2)u_2 - v$$

Ограничения

$u_1, u_2 \in [-1, 1]$, $v \in [-1, 1]$.

Целевое множество

$M = \{1\} \times \{(0, 0)\}$

Обозначения

$$W \triangleq \{(t, x_1, 0) : t \in [1/2, 1],\ x_1 = 1 - \exp(t - 1)\} \cup [0, 1] \times \{(0, 0)\}.$$

$$\chi_{W,\varepsilon}(t, x_1, x_2) \triangleq \frac{d((t, x_1, x_2), W_\varepsilon)}{d((t, x_1, x_2), W_\varepsilon) + d((t, x_1, x_2), W)},$$

$$W_\varepsilon = \{(t, x_1, x_2) : d((t, x_1, x_2), W) \geq \varepsilon\}.$$

Достаточное условие регулярной зависимости

Теорема

Пусть существует непрерывная функция $z(\cdot,\cdot) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая по фазовой переменной условиям Липшица и подлинейного роста, такая, что $H(t, x, s) \leq \langle s, z(t, x)\rangle$ для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$.

Тогда

1. если отображение $t \mapsto M[t]$ непрерывно справа, то сечения множества успешной разрешимости задачи наведения непрерывно зависят от времени;
2. если $M \subset \{\vartheta_0\} \times \mathbb{R}^n$ и M линейно связно, то и сечения множества успешной разрешимости задачи наведения – линейно связные множества.

Достаточное условие регулярной зависимости, II

Пусть $H(t,x,s) \leq 0 \; \forall (t,x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$.

Тогда

1. если отображение $t \mapsto M[t]$ непрерывно справа, то сечения множества успешной разрешимости задачи наведения непрерывно зависят от времени;
2. если $M \subset \{\vartheta_0\} \times \mathbb{R}^n$ и M линейно связно, то и сечения множества успешной разрешимости задачи наведения – линейно связные множества.

Достаточное условие регулярной зависимости, III

Пусть $f(t,x,u,v) = g(t,x) + h(t,u,v)$, при чем

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle s, h(t,u,v)\rangle \le 0 \ \forall t \in [t_0, \vartheta_0] \ \forall s \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

1. если отображение $t \mapsto M[t]$ непрерывно справа, то сечения множества успешной разрешимости задачи наведения непрерывно зависят от времени;
2. если $M \subset \{\vartheta_0\} \times \mathbb{R}^n$ и M линейно связно, то и сечения множества успешной разрешимости задачи наведения – линейно связные множества.

Спасибо за внимание