О задаче наведения конфликтно-управляемой системы на цилиндрическое множество

Ю.В. Авербух

Институт математики и механики УрО РАН
Екатеринбург, Россия

*Международная конференция
“Моделирование и исследование устойчивости динамических систем” (DSMSI-2007)
Киев, 22-25 мая 2007*

Постановка задачи

Конфликтно-управляемая система

$$\dot{x} = f(x, u, v), \tag{1}$$

$$t \in [0, \vartheta], \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in P, \ v \in Q.$$

Управление первого игрока: u, второго: v.

Целевое множество

$$M = [0, \vartheta] \times F.$$

$F \subset \mathbb{R}^n$, F замкнуто.

Условия:

- P и Q – компакты в конечномерном пространстве;
- $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ – непрерывна;
- f липшицева по переменной x;
- f удовлетворяет условию подлинейного роста по x.

Задача рассматривается в классе контрстратегия/стратегия.

Формализация Н.Н.Красовского и А.И.Субботина

Пошаговое движение

Пусть $U : [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times Q \to P$ – контрстратегия. (t_*, x_*) – позиция, $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^N$ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta]$, $v[\cdot]$ – управление второго игрока. Тогда пошаговое движение $x[\cdot] = x[\cdot, t_*, x_*, U, v[\cdot]]$ – это решение уравнений:

$$x[t] = x[\tau_{i-1}] + \int_{\tau_{i-1}}^{t} f(x[\xi], U(\tau_{i-1}, x[\tau_{i-1}], v[\xi]), v[\xi])d\xi,$$

$$t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \;\; x[\tau_0] = x_*.$$

Пределы всех возможных пошаговых движений при стремлении мелкости разбиения к нулю составляют пучок конструктивных движений.

Вид решения

Согласно теореме об альтернативе Н.Н.Красовского и А.И.Субботина:

- множество успешной разрешимости задачи первого игрока – максимальный u-стабильный мост;
- оптимальная контрстратегия – контрстратегия, экстремальная к максимальному u-стабильному мосту.

Определение

Множество $W \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ называется u-стабильным мостом если:

$$\forall (t_*, x_*) \in W \ \forall v_* \in Q \ \exists y(\cdot)$$
$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, x, u, v_*) : u \in P\}, \ \ y(t_*) = x_*, \ \exists \theta \in [t_*, \vartheta_0] :$$
$$((\theta, y(\theta) \in M) \& \ ((t, y(t)) \in W \ \forall t \in [t_*, \theta]).$$

Контрстратегия, экстремальная к множеству W

Пусть (t_*, x_*) – позиция, $v_* \in Q$. w_* – ближайший к x_* элемент $W[t_*]$. Тогда

$$U(t_*, x_*, v_*) \triangleq \mathrm{argmin}\{\langle w_* - x_*, f(x_*, u, v_*)\rangle : u \in P\}.$$

Здесь M – целевое множество,

$$E[t] \triangleq \{t \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in E\}.$$

Условие седловой точки в маленькой игре

Для всех $x, s \in \mathbb{R}^n$

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle s, f(x,u,v)\rangle = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle s, f(x,u,v)\rangle.$$

В случае выполнения условия седловой точки в маленькой игре существует оптимальная стратегия первого игрока $U(t,x)$. Эта стратегия является экстремальной к максимальному u-стабильному мосту.

Конфликтно-управляемая система

$$\dot{x} = f(x, u, v), \tag{1}$$
$$t \in [0, \vartheta],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in P,\ v \in Q.$$

Управление первого игрока: u, второго: v.

Целевое множество

$$M^{(1)} = [0, \vartheta] \times F.$$

$F \subset \mathbb{R}^n$, F замкнуто.

Максимальный u-стабильный мост – $\mathfrak{W}^{(1)}$.

Эквивалентная задача “в момент”

Конфликтно-управляемая система

$$\dot{x} = u_0 f(x, u, v), \tag{2}$$

$$t \in [0, \vartheta],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u_0 \in \{0, 1\},\ u \in P,\ v \in Q.$$

Управления первого игрока: u_0, u, второго: v.

Целевое множество

$$M^{(2)} = \{\vartheta\} \times F.$$

$F \subset \mathbb{R}^n$, F замкнуто.

Максимальный u-стабильный мост – $\mathfrak{W}^{(2)}$.

Оператор программного поглощения для i-й системы

$A^{(i)}(E)$ –

это множество тех $(t_*, x_*) \in E$ *для которых при каждом постоянном* $v_* \in Q$ *существует управление первого игрока приводящее* i*-ю систему на множество* $M^{(i)}$ *внутри множества* E.

Последовательность множеств, $i = 1, 2$

$$W_0^{(i)} = [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n;$$

$$W_k^{(i)} = A^{(i)}(W_{k-1}^{(i)}), \; k \in \mathbb{N}.$$

$$\mathfrak{W}^{(i)} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k^{(i)}.$$

Теорема

Справедливы утверждения:

1. $W_k^{(1)} = W_k^{(2)}\ \forall k \in \mathbb{N}$;
2. $\mathfrak{W}^{(1)} = \mathfrak{W}^{(2)}$;
3. если система (1) удовлетворяет условию седловой точки в маленькой игре, то и система (2) также удовлетворяет условию седловой точки в маленькой игре.

Игры с функционалом платы

Исходная система

$$\dot{x} = f(x, u, v), \tag{1}$$
$$t \in [0, \vartheta],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in P,\ v \in Q.$$

Предполагается выполненным условие седловой точки в маленькой игре.

Целевой функционал

$$\min_{t \in [0,\vartheta]} \sigma(x(t)).$$

Эквивалентная игра с функционалом платы

Расширенная система

$$\dot{x} = u_0 f(x, u, v), \tag{2}$$

$$t \in [0, \vartheta],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u_0 \in \{0, 1\},\ u \in P,\ v \in Q.$$

Целевой функционал

$$\sigma(x(\vartheta)).$$

Спасибо за внимание