А. А. УСПЕНСКИЙ, П. Д. ЛЕБЕДЕВ, П. А. ВАСЁВ

АППРОКСИМАЦИЯ НЕГЛАДКОЙ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗУЛЬТАТА В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Изучен один класс задач быстродействия с круговой вектограммой скоростей и в общем случае негладким и невыпуклым целевым множеством. Показана связь функции оптимального результата с обобщённым решением соответствующей краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных типа Гамильтона – Якоби и эйконала. Построены сингулярные кривые, так называемые биссектрисы целевого множества. Приведен пример решения одной задачи быстродействия. Для визуализации построения аппроксимации функции оптимального результата применен программный комплекс «SharpEye».

Ключевые слова: *задача быстродействия, сингулярная кривая, краевая задача, функция оптимального результата.*

1. Постановка задач

Рассмотрим взаимосвязанные задачи на плоскости $\mathbb{R}^2$ для заданного замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$.

Задача I. Пусть управляемая система [1] на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет динамику

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2, \end{cases} \tag{1}$$

где на управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ наложено ограничение $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} \leqslant 1$. Требуется привести движение динамической системы (1) на множество M за наименьшее время за счет надлежащего выбора допустимого управления $\nu = (\nu_1, \nu_2)$.

Функцией оптимального результата [1] в задаче I является функция $\rho(\mathbf{x}, M)$ расстояния до множества M (здесь и далее обозначаем жирным шрифтом вектор на плоскости $\mathbf{x} = (x, y)$). Управлением, обеспечивающим приведение системы на целевое множество за кратчайшее время, является вектор ν единичной длины, сонаправленный $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, где $\mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x})$, т. е.

$$\nu = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|},\ \mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x}).$$

Оптимальной траекторией для задачи I в произвольной точке является отрезок $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, где $\mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x})$.

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-00427-а, грантом Президента РФ для ведущих научных школ № НШ-5927.2012.1, Программы Президиума РАН «Математические модели и алгоритмы в управляемых системах с нелинейной динамикой» при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1012) и проекта молодых ученых и аспирантов УрО РАН «Оптимальные конструкции и аппроксимации в динамических игровых задачах».

Задача II. Пусть задано дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка [2] типа Гамильтона – Якоби

$$\min_{\nu\colon \|\nu\|\leqslant 1}\left(\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)+1=0 \qquad (2)$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma}=0. \qquad (3)$$

Краевое условие (3) определено на границе $\Gamma=\partial M$ замкнутого множества $M\subset\mathbb{R}^2$.

В работах [3–5] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Функция* $u(\mathbf{x})=\rho(\mathbf{x},M)$ *— минимаксное решение задачи Дирихле* (2), (3) *на множестве* $\overline{G}$, *где* $G=\mathbb{R}^2\setminus M$.

Задача III. Пусть задано уравнение в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-1=0, \qquad (4)$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma}=0. \qquad (5)$$

Задача (4), (5) изучается в геометрической оптике: линии уровня её решения совпадают с волновыми фронтами, порождёнными источником, распределённым вдоль кривой Г. Уравнение (4) является частным случаем уравнения эйконала [6] для однородной среды.

Исходя из содержательных аспектов и постулатов геометрической оптики [6], С. Н. Кружков ввел [7] так называемое главное (фундаментальное) решение задачи (4), (5), имеющее вид $u(\mathbf{x})=-\rho(\mathbf{x},M)$.

По сути задачи I–III описывают один процесс — распространение волнового фронта [8; 9] от множества, когда скорость движения волны берется из круга единичного радиуса с центром в начале координат. Их решение сводится к построению функции евклидового расстояния до множества M. При этом в случае невыпуклого множества M задачи I–III не имеют гладкого решения. Авторами введены для его отыскания новые конструкции, описанные в следующих разделах.

2. Биссектриса множества

Свойства функции $u(\mathbf{x})=\rho(\mathbf{x},M)$ изучались ранее с применением методов дифференциальной геометрии [10], выпуклого анализа [11] и теории особенностей [12]. Была выявлена геометрия линий её негладкости и предложены алгоритмы их построения.

Определение 1. *Биссектрисой* $L(M)$ замкнутого непустого множества $M\subset\mathbb{R}^2$ назовем [13; 14] множество всех точек из его дополнения до $\mathbb{R}^2$, которые имеют не менее двух проекций на множество M:

$$L(M)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\setminus M\colon\ \exists\mathbf{y}_1\in\Omega_M(\mathbf{x})\ \exists\mathbf{y}_2\in\Omega_M(\mathbf{x})\ \mathbf{y}_1\neq\mathbf{y}_2\right\}.$$

Под множеством $\Omega_M(\mathbf{x})$ проекций точки $\mathbf{x}$ на множество M понимаем набор всех точек $\mathbf{y} \in M$, ближайших в евклидовой метрике к $\mathbf{x}$.

Кривая $L(M)$ является рассеивающей линией по классификации Р. Айзекса [15] в задаче быстродействия I. При построении обощённого (минимаксного) решения задачи II биссектриса является сингулярным множеством в том смысле, что через каждую её точку проходит более одной характеристики [2] уравнения (2). В задаче III кривая $L(M)$ есть множество изломов волновых фронтов [7]. Изломы обусловлены тем, что в точки биссектрисы доходит световая волна от двух или более источников, расположенных на границе множества M.

Функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ дифференцируема во всех точках $G \setminus L(M)$. На биссектрисе эта функция супердифференцируема [16]. Её супердифференциал имеет вид

$$D^+u(\mathbf{x}) = \mathrm{co}\left\{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\rho(\mathbf{x}, M)} : \mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x})\right\}. \tag{6}$$

Введём основные элементы, необходимые для построения биссектрисы.

Определение 2. Несовпадающие точки $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ границы ∂M множества M, являющиеся проекциями точки $\mathbf{x}$ биссектрисы $L(M)$ на это множество, называются *α-симметричными точками* [13; 14]. При этом $\mathbf{x}$ называется *точкой, порожденной парой* $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$.

Определение 3. Будем называть точку $\mathbf{y}_0 \in \partial M$ *псевдовершиной* [13; 14] *множества* M, если существует последовательность $\{(\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ пар α-симметричных точек, сходящаяся к $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$:

$$\lim_{n\to\infty}(\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0).$$

Определение 4. Пусть $\mathbf{y}_0$ — псевдовершина множества M с биссектрисой $L(M)$. Будем говорить, что точка $\hat{\mathbf{x}}$ является *крайней точкой биссектрисы* [17], *соответствующей псевдовершине* $\mathbf{y}_0$, если существуют последовательности $\{(\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \partial M$ и $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(M)$, для которых выполняются следующие условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{x}_n = \hat{\mathbf{x}}$;
3) $\forall n \in \mathbb{N}\ (\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n) \subset \Omega_M(\mathbf{x}_n)$.

Подробнее о нахождении псевдовершин и крайних точек см. в [13; 14; 17].

3. Свойства биссектрисы $L(M)$

Ранее в работах авторов разрабатывались алгоритмы построения множества $L(M)$ и изучались их свойства. Найдены необходимые условия существования псевдовершин.

Теорема 2. *Если $\mathbf{y}_0$ — псевдовершина множества M с кусочно-гладкой границей Γ и в точке $\mathbf{y}_0$ определен радиус кривизны R кривой Γ, то кривизна k кривой Γ достигает в точке $\mathbf{y}_0$ локального максимума.*

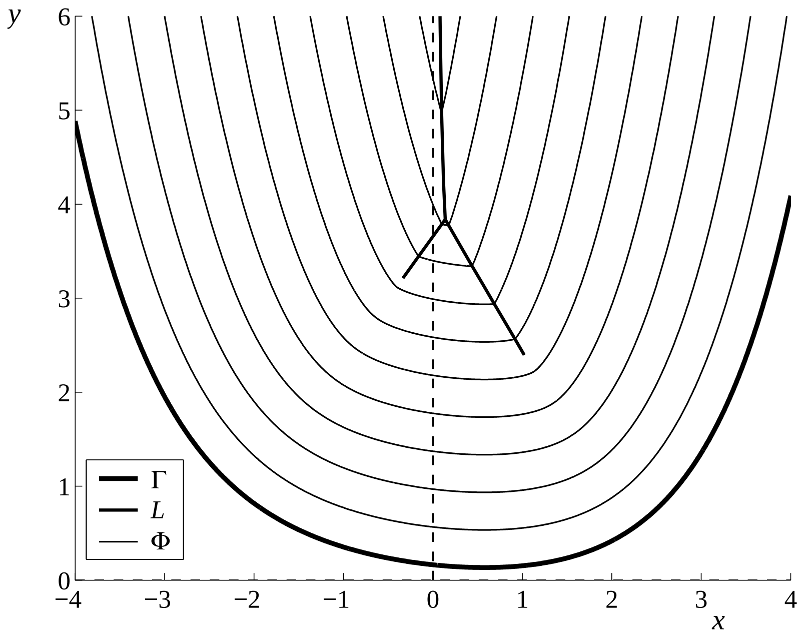

Рис. 1. Множество M, биссектриса $L(M)$ и волновые фронты Φ

Доказательство приведено в работе [14].

Выписаны координаты крайних точек биссектрисы для случая достаточно гладких псевдовершин.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{y}_0$ *— псевдовершина множества* M *с биссектрисой. Если в точке* $\mathbf{y}_0$ *для кривой* Γ *определён центр кривизны* $\mathbf{c}$*, то* $\mathbf{c}$ *есть крайняя точка биссектрисы, соответствующая псевдовершине* $\mathbf{y}_0$*.*

Утверждение доказано в [14].

Найдены достаточные условия гладкости биссектрисы и построена к ней касательная.

Теорема 4. *Пусть у точки* $\mathbf{x} \in L(M)$ *множество проекций на* M *состоит из двух точек* $\Omega_M(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$*, и в окрестности точек* $\mathbf{y}_1$ *и* $\mathbf{y}_2$ *кривая* $\Gamma = \partial M$ *является графиком дважды гладкой функции и выполняются следующие условия:*

1) $\mathbf{x} \neq (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)/2$;

2) *Точка* $\mathbf{x}$ *не является центром кривизны кривой* Γ *хотя бы в одной из точек* $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ *(в т. ч. в одной из этих точек кривизна* Γ *может равняться нулю).*

Тогда в точке $\mathbf{x}$ *к кривой* $L(M)$ *определена касательная* Π *— биссектриса угла* $\mathbf{y}_1\mathbf{x}\mathbf{y}_2$

Доказательство можно найти в работе [18].

Приведённые результаты используются для построения волновых фронтов — линий уровня функции расстояния до множества M. На их основе строятся аппроксимации графика функции $u(\mathbf{x})$.

4. Пример решения задач I–III

На базе введённых конструкций А. А. Успенским и П. Д. Лебедевым [19; 20] разработаны численные методы построения функции расстояния до невыпуклого множества. Реализован программный комплекс, позволяющий проводить и визуализировать вычисления в виде линий уровня функции $u(x, y)$ на плоскости и её графика в трёхмерном пространстве [21; 22].

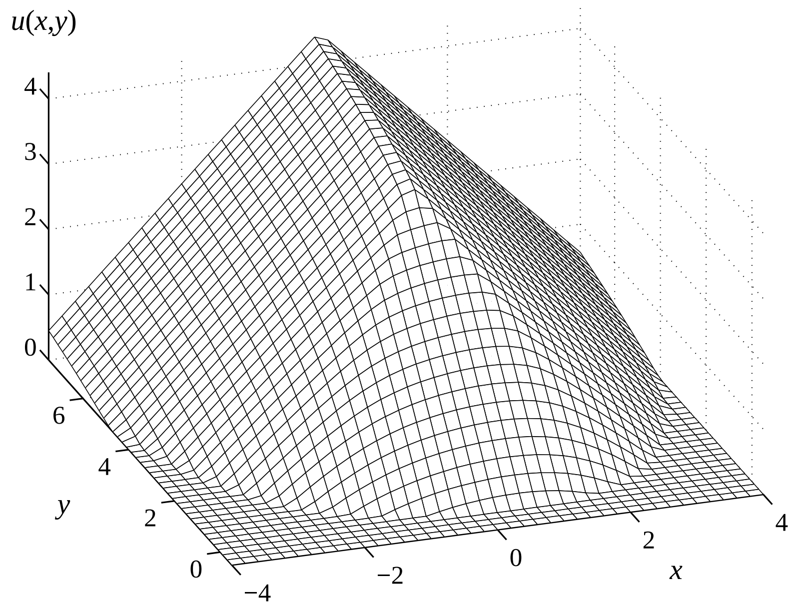

Рис. 2. Функция $u(x, y)$

Пример 1. Рассмотрим задачу I, в которой целевым множеством M взят подграфик $\operatorname{hyp} f$ функции

$$f(x) = \exp(x - 2.5) + \exp(-x - 2.5) - x/10.$$

Биссектриса $L(M)$ состоит из объединения трёх одномерных многообразий (гладких ветвей) и одного нульмерного — точки бифуркации $\mathbf{x}_0 \approx (0.138, 3.838)$, в которой они склеиваются. У биссектрисы имеются две крайние точки $\hat{\mathbf{x}}_1 \approx (-0.335, 3.213)$ и $\hat{\mathbf{x}}_2 = (1.021, 2.396)$. Они порождены соответственно двумя псевдовершинами множества M: $\mathbf{y}_1 \approx (-2.039, 0.845)$ и $\mathbf{y}_2 \approx (2.14, 0.493)$.

Кривая Γ, линии уровня Φ функции оптимального результата $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ с шагом $h_\rho = 0.4$ и рассеивающая линия $L(M)$ показаны на рис. 1.

Функция $u(x, y)$ в виде аппроксимации на прямоугольной сетке с размером клетки 0.2×0.2 представлена на рис. 2.

Альтернативным способом построения решения задач I–III является применение конечно-разностного оператора. Он основан на аппроксимации графика $\operatorname{gr} f$ ломаной линией и пошаговом построении ломаных, с достаточно большой точностью совпадающих с волновыми фронтами. При этом узлы полученной сет-

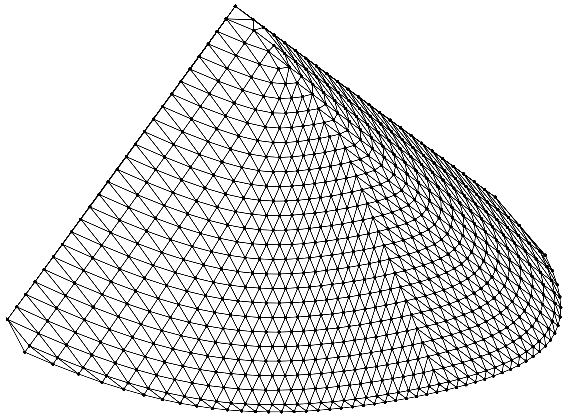

Рис. 3. Аппроксимация функции $u(x, y)$

ки оказываются расположенными нерегулярно. Для их графического изображения использована система визуализации «SharpEye», разработанная П. А. Васёвым и его коллегами [23]. Система позволяет создавать дополнительные модули для загрузки данных произвольного формата. Так, был создан модуль, считывающий расчетные данные аппроксимации функции $u(x, y)$ и строящий по ним поверхность с помощью триангуляции Делоне. Аппроксимация решения задач I–III показана на рис. 3. На нём видны негладкие особенности графика, обусловленные формой супердифференциала (6) в точках биссектрисы $L(M)$.

Список литературы

1. **Красовский, Н. Н.** Игровые задачи динамики. I / Н. Н. Красовский // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1969. — № 5. — С. 3–12.

2. **Субботин, А. И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / А. И. Субботин. М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. технологий, 2003. — 336 с.

3. **Успенский, А. А.** Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия / А. А. Успенский, П. Д. Лебедев // Прикладная математика и информатика : тр. фак-та вычисл. математики и кибернетики Моск. гос. ун-та им. М. В. Ломоносова. — М. : МАКС Пресс, 2007. — № 27. — С. 65–79.

4. **Лебедев, П. Д.** Построение минимаксного решения уравнений типа эйконала / П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2008. — Т. 14, № 2. — С. 182–191.

5. **Brykalov, S. A.** Symmetry Sets in Construction of a Minimax Solution for a Bellman-Isaacs Equation / S. A. Brykalov, P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii [et al.] // Proceedings of the 18th IFAC World Congress / Edited by S. Bittanti, A. Cenedese, S. Zampieri. — Milan, 2011. — Vol. 18, Part 1. — IFAC PapersOnLine Identifier: 10.3182/20110828-6-IT-1002.00744. — http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/51871.html

6. **Слюсарев, Г. Г.** Геометрическая оптика / Г. Г. Слюсарев. — М. : Изд-во АН СССР, 1946. — 332 с.

7. **Кружков С. Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I / С. Н. Кружков // Мат. сб. — 1974. – Т. 98, вып. 3. — С. 450–493.

8. **Арнольд, В. И.** Особенности каустик и волновых фронтов / В. И. Арнольд. — М. : Фазис, 1996. — 334 с.

9. **Арнольд, В. И.** Инварианты и перестройки фронтов на плоскости / В. И. Арнольд // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1995. — № 209. — С. 14–64.

10. **Рашевский, П. К.** Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 432 с.

11. **Лейхтвейс, К.** Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. — М. : Наука, 1985. — 335 с.

12. **Брус, Дж.** Кривые и особенности / Дж. Брус, П. Джиблин. — М. : Мир, 1988. — 262 с.

13. **Лебедев, П. Д.** Вычисление меры невыпуклости плоских множеств / П. Д. Лебедев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2007. — Т. 13, № 3. — С. 84–94.

14. **Лебедев, П. Д.** Геометрия и асимптотика волновых фронтов / П. Д. Лебедев, А. А. Успенский // Изв. вузов. Математика. — 2008. — № 3 (550). — С. 27–37.

15. **Айзекс, Р.** Дифференциальные игры / Р. Айзекс. — М. : Мир, 1967. — 479 с.

16. **Демьянов, В. Ф.** Недифференцируемая оптимизация / В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев. — М. : Наука, 1981. — 384 с.

17. **Успенский, А. А.** Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстродействия с круговой индикатрисой / А. А. Успенский, П. Д. Лебедев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2008. — Т. 14, № 4. — С. 82–99.

18. **Успенский, А. А.** Условия гладкости множества симметрии минимаксного решения одного уравнения Айзекса–Беллмана / А. А. Успенский, П. Д. Лебедев // Проблемы динамического управления : сб. науч. тр. Моск. гос. ун-та. — МАКС Пресс. — 2008. — Вып. 3. — С. 231–245.

19. **Успенский, А. А.** Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии / А. А. Успенский, П. Д. Лебедев // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 7. — С. 50–57.

20. **Успенский, А. А.** Процедуры вычисления меры невыпуклости плоского множества / А. А. Успенский, П. Д. Лебедев // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2009. — Т. 49, № 3. — С. 431–440.

21. **Лебедев, П. Д.** Алгоритмы построения сингулярных множеств для одного класса задач быстродействия / П. Д. Лебедев, А. А. Успенский // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика, механика, компьютерные науки. — 2010. — Вып. 3. — С. 30–41.

22. **Успенский, А .А.** О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов / А. А. Успенский, П. Д. Лебедев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 1. — С. 171–186.

23. **Васёв, П. А.** Конструктор специализированных систем визуализации / П. А. Васёв, С. С. Кумков, Е. Ю. Шмаков // Науч. визуализация. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 64–77.